TD 08 - Oscillateurs amortis

En régime transitoire

1 Analyse dimensionnelle

1. Donner et interpréter les trois temps que l'on peut dimensionnellement construire avec une résistance R, une inductance L et une capacité C.

2. Peut-on déterminer un facteur de qualité par analyse dimensionnelle ?

3. Donner la dimension de la constante de frottement fluide λ définie par $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$. Par analyse dimensionnelle, en déduire un temps caractéristique pour un oscillateur mécanique de masse m, de raideur k et de constante d'amortissement λ. Est-ce un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire ?

2 Circuit R,L,C parallèle

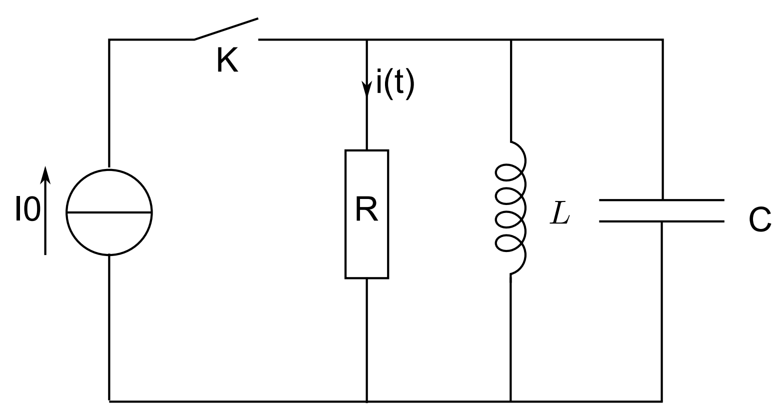


Figure 2.1: Circuit RLC parallèle

Un circuit constitué d'une résistance R, d'une capacité C et d'une inductance L en parallèle, est alimenté par une source de courant de courant électromoteur I_0 (Figure 2.1). L'interrupteur est ouvert depuis longtemps. A l'instant t=0, on le ferme.

1. Déterminer les valeurs de u et $\dfrac{du}{dt}$ juste après la fermeture de l'interrupteur ($t = 0^+$).

2. Déterminer la valeur de la tension u en régime permanent.

3. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. La mettre sous la forme suivante:
$$\ddot{u} + 2\sigma\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = A$$
où σ, ω_0 et A sont des constantes à déterminer. Quelle est la dimension de σ ? On l'appelle "coefficient d'amortissement". Quelle relation y a-t-il entre le coefficient d'amortissement et le facteur de qualité ?

4. A quelle condition sur le coefficient d'amortissement a-t-on un régime pseudo-périodique ? Exprimer dans ce cas la pseudo-période T et le temps caractéristique d'amortissement τ en fonction de ω_0 et σ.

5. Sans calculs supplémentaires, tracer alors l'allure des variations de $u(t)$.

3 Détermination rapide d'un facteur de qualité

Soit un oscillateur d'équation différentielle
$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{s} + \omega_0^2 s = 0.$$

1. Résoudre cette équation différentielle. On fera apparaître la pseudo-pulsation ω et le temps caractéristique d'amortissement τ. On ne déterminera pas les constantes A et B puisqu'on n'a pas fixé de conditions initiales.

2. A partir de quelle valeur de Q peut-on confondre ω et ω_0 avec une erreur relative de moins de 1% ? On considèrera que c'est le cas dans la suite.

3. On considère que le régime transitoire dure le temps qu'il faut pour que les oscillations n'aient plus que 5% de leur amplitude initiale. Calculer le nombre N d'oscillations visibles pendant la durée du régime transitoire. En déduire une méthode rapide de détermination du facteur de qualité d'un oscillateur.

4 Détermination des caractéristiques d'un circuit

Un circuit R,L,C série en régime transitoire donne les courbes expérimentales (Figure 4.1) pour la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur et le courant$i(t)$ qui traverse le circuit.

1. S'agit-il d'un régime libre ou de la réponse à un échelon de tension ? Le cas échéant, quelle est la tension E aux bornes du générateur ?

2. Que vaut la tension aux bornes de la bobine à $t = 0^+$? En déduire l'inductance L de la bobine.

3. On rappelle l'expression du facteur de qualité et de la pulsation propre de ce circuit: $Q = \frac{1}{R}\sqrt{LC}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
Par ailleurs un calcul non demandé ici permet de montrer que
$$i(t) = \exp^{-t/\tau}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))$$
avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ et $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$.
En vous aidant du résultat de l'exercice 3, évaluer le facteur de qualité et démontrer que l'on peut confondre ω et ω_0 ici.

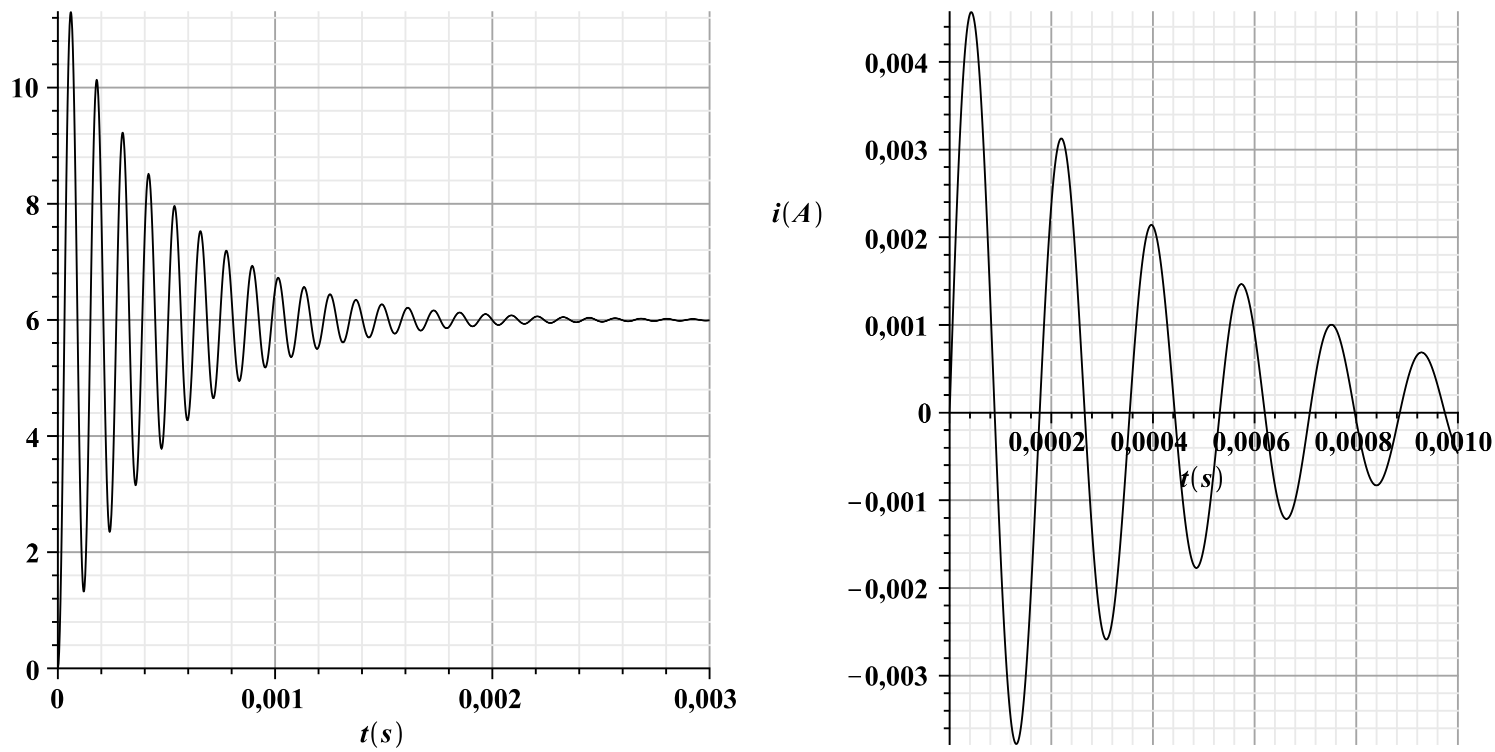


Figure 4.1: Réponse d'un circuit R,L,C série

4. Mesurer la pseudo-période et en déduire la capacité C.

5. On définit le décrément logarithmique

$$\delta = \frac{1}{N}\ln\left(\frac{i(t)}{i(t+NT)}\right)$$

   où T est la pseudo-période et N un nombre entier quelconque. Démontrer que $\delta = \dfrac{\pi}{Q}$.

6. Mesurer le décrément logarithmique et en déduire la valeur du facteur de qualité. Comparer à l'évaluation de la question 3. En déduire enfin la résistance R du circuit.

5 Trajectoire de phase en régime critique

Un amortisseur de voiture est conçu pour retourner le plus rapidement possible à son équilibre. On note ω_0 sa pulsation propre.

1. Quelle doit être son facteur de qualité. Donner sans démonstration l'équation différentielle pour la position $x(t)$ à l'aide du paramètre ω_0.

2. On suppose qu'à $t = 0$, on a $x = x_0$ et $v = 0$. Déterminer $x(t)$ et $v(t)$ à tout instant.

3. En déduire la trajectoire de phase correspondante, dont on précisera le point extrémum en vitesse.

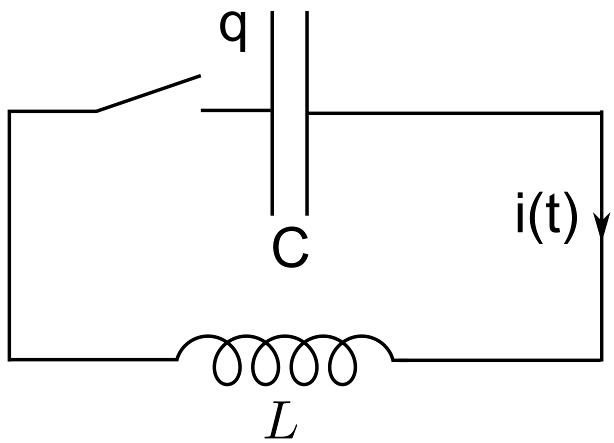


Figure 6.1: Circuit LC série

6 Energie d'un circuit LC

Soit un circuit L,C série (Figure 6.1). Initialement le condensateur a une charge q_0. A $t = 0$ on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer $q(t)$. En déduire une méthode de mesure d'une inductance inconnue.
2. Démontrer que l'énergie stockée dans ce circuit est constante et déterminer sa valeur.

7 Contrariété expérimentale.

On souhaite étudier un circuit RC série en régime transitoire. Pour cela, on réalise le circuit du cours, alimenté par un GBF en créneaux: $e(t) = \pm E$. On visualise la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur à l'aide d'un oscilloscope. Le GBF a une résistance de sortie $r = 50\ \Omega$ et l'entrée de l'oscilloscope est assimilable à une capacité $C_0 = 18\ pF$ en parallèle avec une résistance $R_0 = 1,0\ M\Omega$.

1. Faire un schéma du circuit équivalent.
2. En associant des dipôles, mais sans calculs, dire à quelle condition sur R on peut considérer le GBF comme idéal en sortie.
3. De même, dire à quelles conditions sur R et C on peut considérer l'oscilloscope comme idéal en entrée. Faire le schéma équivalent du circuit si l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas vérifiée.
4. Déterminer la constante de temps du circuit:
   (a) si $R = 1\ k\Omega$ et $C = 100$ nF
   (b) si $R = 1\ k\Omega$ et $C = 10$ pF
   (c) si $R = 50\ \Omega$ et $C = 100$ nF
5. On a maintenant $R = 1\ M\Omega$ et $C = 100$ nF.
   (a) Déterminer sans calculs la tension affichée en régime permanent lorsque $e(t) = E$ et lorsque $e(t) = -E$

(b) Déterminer l'équation différentielle pour la tension $u(t)$ et en déduire la constante de temps du circuit. tracer l'allure de $u(t)$.

(c) Comparer à ce qu'on obtiendrait si l'oscilloscope était idéal en entrée.

En régime sinusoïdal forcé

8 Oscillateur sans amortissement

Soit un oscillateur mécanique de raideur k et de masse m, non amorti. On repère sa position $x(t)$ par rapport à l'équilibre.

1. Donner l'équation différentielle du mouvement en régime libre. La résoudre (on ne précise pas de conditions initiales). Exprimer la pulsation ω_0 des oscillations.

2. On y applique une force excitatrice supplémentaire: $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$. Ecrire la nouvelle équation différentielle. La résoudre pour les conditions initiales suivantes: $x(t=0) = 0$ et $\dot{x}(t=0) = 0$.

3. Tracer l'allure des variations de $x(t)$ pour $\omega = 1,1\omega_0$. Un régime permanent est-il atteint ? Pourquoi ?

9 Résonance d'intensité dans un circuit R,L,C parallèle

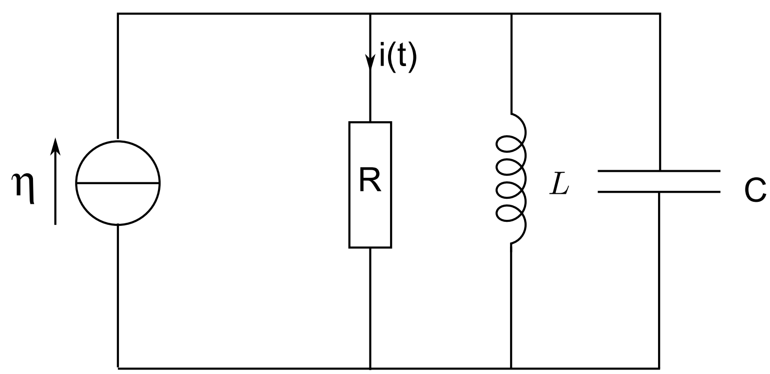


Figure 9.1: Circuit R,L,C parallèle

Le circuit de la figure 9.1 est alimenté par une source idéale de courant d'intensité $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t)$. La résistance est parcourue par le courant $i(t)$. On est en RSF.

1. Déterminer sans calculs la valeur du courant $i(t)$ en basse fréquence et en haute fréquence

2. Calculer l'amplitude complexe $\underline{I}$ de $i(t)$.

3. En déduire l'amplitude réelle I de i(t). Pour quelle pulsation ω_0 y a-t-il résonance ?

4. Déterminer les pulsations de coupure et la bande passante $\Delta\omega$. Que vaut le facteur de qualité $Q' = \dfrac{\omega_0}{\Delta\omega}$?

5. Tracer l'évolution du déphasage de l'intensité $i(t)$ par rapport à $\eta(t)$ en fonction de la pulsation.

10 Détermination des paramètres d'un oscillateur

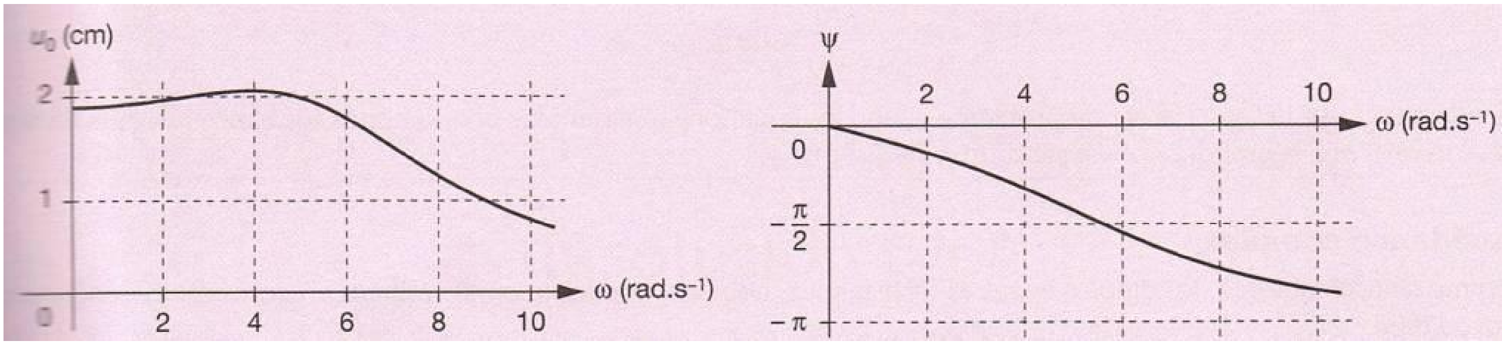


Figure 10.1: Réponse en élongation d'un oscillateur mécanique

Un oscillateur mécanique est excité sinusoïdalement. Les graphes de la figure 10.1 représentent l'amplitude et le déphasage de l'élongation par rapport à la force excitatrice. Evaluer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q de cet oscillateur.

11 Détermination des paramètres d'une bobine

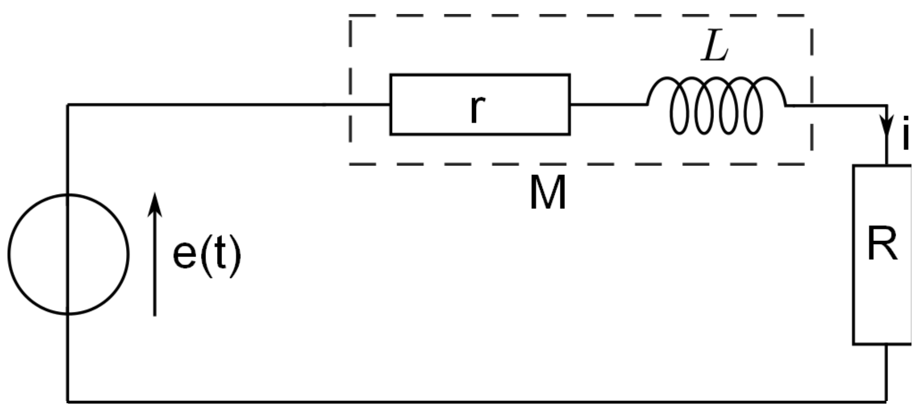


Figure 11.1: Bobine dans un circuit LR

Une bobine d'inductance L et de résistance r inconnues, est mise dans le circuit de la figure 11.1. La tension $e(t)$ est sinusoïdale de fréquence $f = 10{,}0$ kHz et la résistance vaut $R = 470\ \Omega$.

1. On branche les deux voies d'un oscilloscope de façon à visualiser la tension $e(t)$ et la tension $u(t)$ aux bornes de la résistance. Indiquer le branchement des voies sur le schéma, en précisant la position de la masse.

2. Déterminer le déphasage de u(t) par rapport à e(t), ainsi que le rapport des amplitudes $\dfrac{U_0}{E_0}$, en fonction de L, R, r et de la pulsation ω.

   On relève les courbes de la figure 11.2. La vitesse de balayage n'est pas précisée, et les calibres verticaux sont les mêmes sur les deux voies.

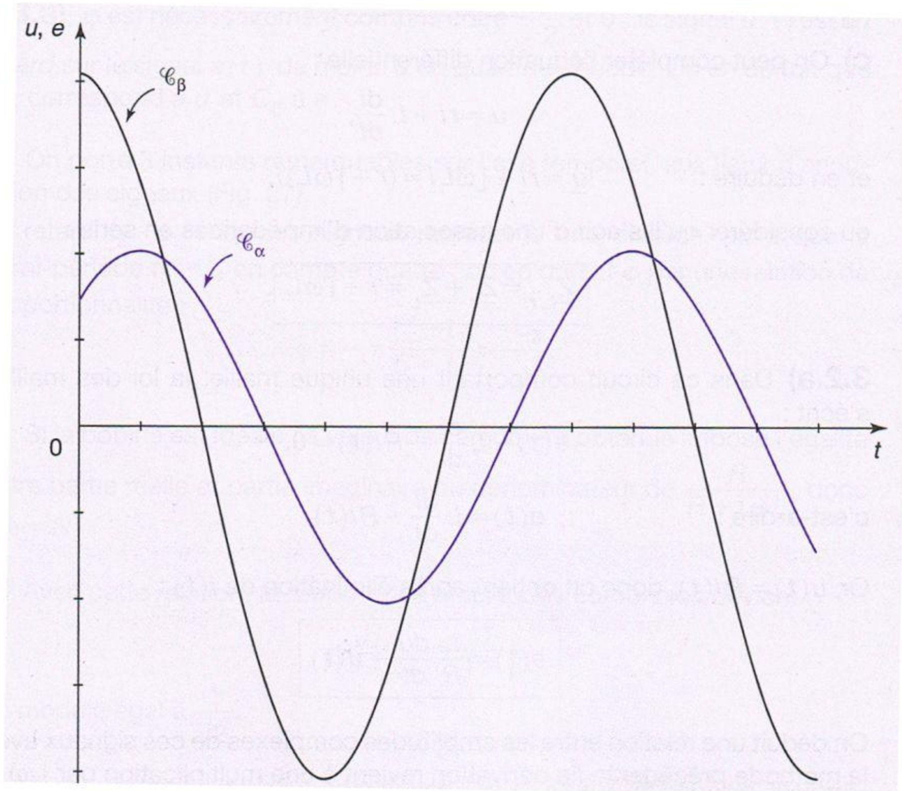
3. 

Figure 11.2: Oscillogrammes circuit LR

(a) En examinant quel signal est en retard sur l'autre, attribuer les courbes C_α et C_β au signal u(t) ou e(t).

(b) Déterminer la valeur numérique du déphasage et du rapport des amplitudes. En déduire les valeurs numériques de r et L.

12 Interprétation énergétique du facteur de qualité à la résonance d'intensité

Un circuit RLC série de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{1}{LC}}$ et de résistance R est excité à sa pulsation propre par une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega_0 t)$. On est en régime sinusoïdal forcé.

1. Donner l'expression de l'intensité $i(t)$, en notant, sans chercher à les calculer, I_0 l'amplitude et ϕ le déphasage de $i(t)$ par rapport à $e(t)$.

2. En déduire l'expression de la charge $q(t)$.

3. Démontrer que l'énergie électromagnétique E de l'oscillateur est constante et calculer cette constante.

4. Que vaut la puissance $p(t)$ dissipée à l'instant t dans la résistance ? En déduire $\Delta E = \int[0][T]p(t)dt$, énergie dissipée pendant une période T dans la résistance.

5. Exprimer le rapport $\dfrac{E}{\Delta E}$ en fonction du facteur de qualité $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{1}{RC\omega_0}$. Commenter le résultat.