Problèmes stationnaires à une dimension

Nous étudions ici les méthodes de calcul de zéros d'une fonction. Nous étudions d'abord les problèmes d'approximation sur des trinômes dans l'application des formules classiques. Nous traiterons ensuite la recherche de zéro sur des fonctions quelconques d'abord par dichotomie, et ensuite par la méthode de Newton. Ce cours s'appuie sur les livres *Méthodes Numériques* en Alfio Quarteroni et *Analyse numérique et équations différentielles* de Jean-Pierre Demailly.

I Problèmes d'approximation

Nous savons déjà que le calcul sur ordinateur pose des problèmes d'approximation dans la représentation et le calcul des réels. Nous allons mettre ceci en évidence.

$\boxed{1}$ – On pose $x = 8.22$, $y = 0.00317$ et $c = 0.00432$. Calculer, avec 3 chiffres significatifs, $(x+y)+z)$ et $x+(y+z)$. L'addition est-elle associative en calculs par arrondis ? On prend maintenant n réels positifs $u_1, \cdots, u_n$ que l'on connait exactement. On estime l'erreur sur une addition de nombres positifs par $\Delta(x+y) \leq \Delta x + \Delta y + \varepsilon(x+y)$. Ici, on aura $\Delta u_k = 0$. On définit la suite s_i par

$$\begin{cases} s_0 = 0 \\ s_k = s_{k-1} + u_k \end{cases}.$$

On remaque donc que $\Delta s_1 = \Delta u_1 = 0$.

$\boxed{2}$ – Evaluer l'erreur effectuée sur le calcul de s_n en fonction de ε et des s_k.

$\boxed{3}$ – Evaluer l'erreur effectuée sur le calcul de s_n en fonction des u_k. Comment minorer l'erreur lorsque l'on somme des réels ?

Les erreurs d'approximation peuvent avoir des conséquences, notamment dans le calcul des racines d'une trinôme. On pourra s'aider dans la suite de la calculatrice.

$\boxed{4}$ – En effectuant les calculs avec 10 chiffres significatifs, trouver les racines de $X^2 - 1634X + 2$ par la méthode classique. Vérifier le résultat obtenu sur la plus petite racine.

$\boxed{5}$ – Comment peut-on améliorer la méthode de calcul ?

Parfois, on n'a pas de méthode formelle de résolution d'une équation de type $f(z) = 0$. On a alors recours à des méthodes numériques telles que la méthode de dichotomie.

II Méthode de dichotomie

Le principe de la dichotomie est simple. On considère une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires nous assure alors l'existence d'un zéro pour cette fonction. Ce zéro n'est pas nécessairement unique. On définit alors trois suites par récurrence en posant $a_0 = a$, $b_0 = b$ et $x_0 = \frac{a+b}{2}$ et :

$$\begin{cases} a_{k+1} = a_k \text{ et } b_{k+1} = x_k & \text{si } f(x_k)f(a_k) < 0 \\ a_{k+1} = x_k \text{ et } b_{k+1} = b_k & \text{si } f(x_k)f(b_k) > 0 \end{cases}$$

et $x_{k+1} = \frac{a_{k+1}+b_{k+1}}{2}$. On s'arrête à l'étape m lorsque la longueur de l'intervalle $\mathscr{I}_m = [a_m, b_m]$ notée $|\mathscr{I}_m|$ est inférieure à ε ou ε est une tolérance fixée par l'utilisateur.

$\boxed{6}$ – Donner $|\mathscr{I}_k|$ en fonction de $|\mathscr{I}_{k-1}|$ puis en fonction de b, a et k.

$\boxed{7}$ – Est-on certain que cet algorithme termine et si oui, en combien d'étapes ?

$\boxed{8}$ – Est-on certain que la suite (x_k) converge ? Montrer que sa limite est alors un zéro noté α de f.

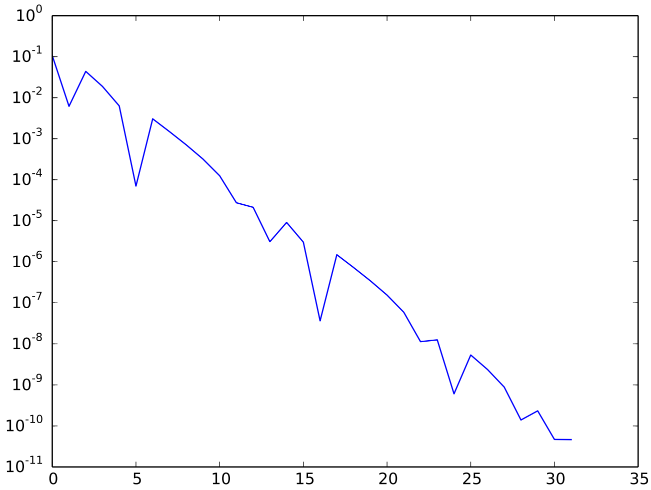

FIGURE 1 – Erreur absolue dans la recherche dichotomique

La méthode de dichotomie est donc convergente. On note e_k l'erreur aboslue de à l'itération k : $e_k = |x_k - \alpha|$.

$\boxed{9}$ – Donner un majorant de l'erreur e_n.

$\boxed{10}$ – Combien faut-il d'itérations pour gagner une décimale de de précision, c'est à dire pour diviser l'erreur par 10 ?

La figure 1 montre la convergence de l'erreur en échelle logarithmique dans la recherche de la racine comprise entre 0.6 et 1 du polynôme $\frac{1}{8}X(63X^4 - 70X^2 + 15)$. On remarque notamment que l'erreur n'est pas décroissante au cours de l'exécution de l'algorithme. On retrouve la division par 10 tous les ~ 3.5 pas calculée dans la question précédente. La méthode de dichotomie est donc une méthode robuste qui converge à coup sûr, mais la convergence se fait lentement. La méthode de Newton permet d'accélérer cette convergence.

III Méthode de Newton

La méthode de Newton est due au mathématicien anglais Isaac Newton (1643-1727) et a été publiée dans un manuscrit posthume en 1736. Elle est reconnue dans le monde de l'analyse numérique pour sa “convergence phénoménale” (Cédric Villani, 2011). On trouvera sur le site de l'APMEP un très bon texte au sujet de cette méthode, avec notamment de nombreuses notes historiques [1].

III.1 Présentation de la méthode

La méthode de Newton consiste en une suite d'opérations très simples. On se donne une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ admettant un zéro au point α et telle que $f'(\alpha) \neq 0$. On suppose que la dérivée de f ne s'annule pas lorsque l'on est suffisamment proche de α et que l'on connait une valeur approximative de α que l'on appelle x_0.

— on trace la tangente à f passant par $(x_0, f(x_0))$;
— on repère le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscisses ;
— on appelle ce point x_1 ;
— on trace la tangente à f passant par $(x_1, f(x_1))$;
— on repère le point d'intersection de cette tangente avec l'axe des abscises ;
— on appelle ce point x_2 ;
— on continue . . .

On voit bien sur la figure 2 que cette stratégie permet de construire une suite (x_k) qui converge vers α. Nous allons ici démontrer que cette suite converge effectivement vers le zéro de α.

$\boxed{11}$ – Rappeler l'équation de la tangente à une courbe en un point.

$\boxed{12}$ – En déduire l'écriture de x_{n+1} en fonction de x_n. On notera $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

1. http://www.apmep.asso.fr/IMG/pdf/APMEP_article_BV_7_C_A.pdf

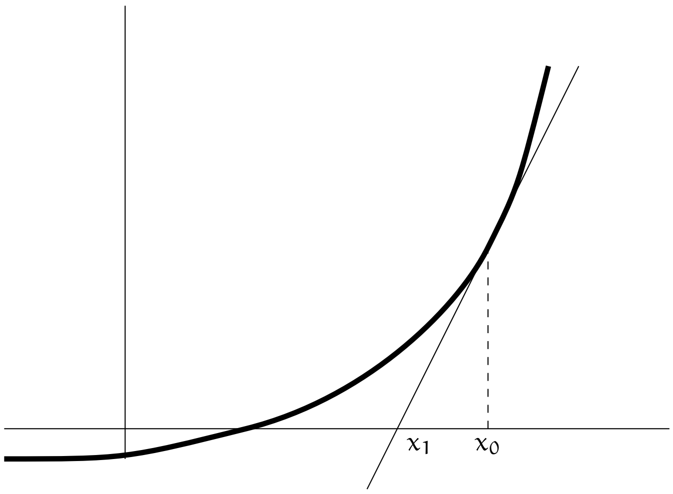

FIGURE 2 – Illustration de la méthode de Newton

$\boxed{13}$ – Montrer que α est un point fixe de Φ et que $\Phi'(\alpha) = 0$.

III.2 Preuve de convergence

$\boxed{14}$ – Montrer qu'il existe un intervalle $[a, b]$ contenant α tel que :

$$\begin{cases} \forall x \in [a,b],\ |\Phi'(x)| < k < 1 \\ \Phi([a,b]) \subset [a,b] \end{cases}$$

On suppose maintenant que x_0 est un élément de l'intervalle $[a, b]$.

$\boxed{15}$ – Montrer que pour tout n entier naturel, x_n est un élément de $[a, b]$.

$\boxed{16}$ – Montrer que $|x_{n+1} - \alpha| \leq k|x_n - \alpha|$. En déduire que la suite de terme général x_n converge vers α.

III.3 Rapidité de convergence - cas simple

On suppose ici que f est de classe $\mathscr{C}^3$.

$\boxed{17}$ – Quelle est la régularité de Φ ? Calculer $\Phi''(\alpha)$.

$\boxed{18}$ – Ecrire la formule de Taylor-Young pour Φ en α à l'ordre 2. En déduire que la quantité $\frac{x_{n+1}-\alpha}{(x_n-\alpha)^2}$ est bornée au voisinage de α.

$\boxed{19}$ – En déduire l'existence d'un réel positif C tel que $|x_{n+1} - \alpha| \leq C|x_n - \alpha|^2$. On dira que la méthode de Newton est d'ordre 2 et que la convergence est quadratique.

$\boxed{20}$ – En déduire une majoration de $|x_n - \alpha|$ en fonction de x_0, α, C et n.

$\boxed{21}$ – La convergence de l'erreur vers 0 est-elle plus rapide que dans le cas de la dichotomie ?

III.4 Rapidité de convergence - cas avancé

On suppose ici comme au début que f est simplement de classe $\mathscr{C}^2$. Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 1

Soit f de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle $I = [\alpha - r, \alpha + r]$ et que $f' \neq 0$ sur I. Soit $M = \max_{x \in I} \left|\frac{f''(x)}{f'(x)}\right|$ et $h = \min(r, \frac{1}{M})$. Alors pour tout $x \in [\alpha - h, \alpha + h]$ on a $|\Phi(x) - \alpha| \leq M|x - \alpha|^2$, et pour tout point initial $x_0 \in [\alpha - h, \alpha + h]$:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{M}(M|x_0 - \alpha|)^{2^n}.$$

Dans la suite, x est un élément de l'intervalle I défini dans le théorème.

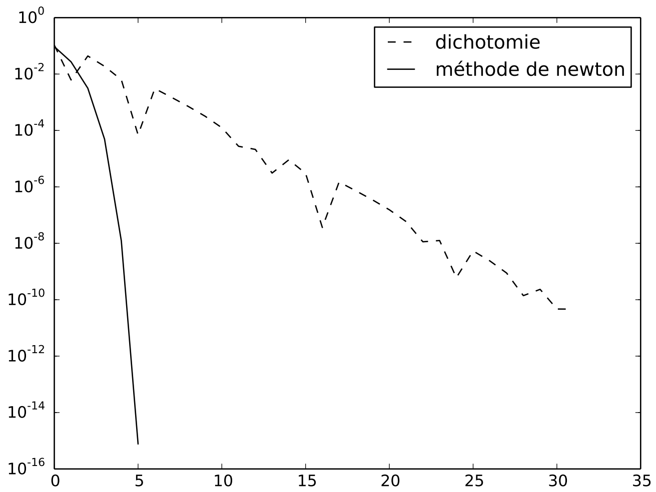

FIGURE 3 – Comparaison de l'erreur absolue dans la recherche dichotomique et la recherche par la méthode de Newton

$\boxed{22}$ – Écrire le développement limité de f en α à l'ordre 1. En déduire que la fonction g définie sur $I \setminus \{\alpha\}$ par $g(x) = \frac{f(x)}{f'(\alpha)(x-\alpha)}$ est prolongeable par continuité en α et positive sur I.

On peut donc dire que la fonction f est du signe de $(x-\alpha)f'(\alpha)$ sur l'intervalle I. On définit la fonction u sur I par $u(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

$\boxed{23}$ – Montrer que $u(x)$ est du signe de $(x-\alpha)$ sur I et calculer $u'(x)$. Montrer que $|u'(x)| \leq 1 + M|u(x)|$.

On se propose de montrer le lemme suivant :

Propriété 1

On a $|u(x)| \leq \frac{1}{M}\left(e^{M|x-\alpha|} - 1\right)$ sur I.

$\boxed{24}$ – On suppose $x \geq \alpha$, quel est le signe de $u(x)$? On pose $v(x) = u(x)e^{-Mx}$, montrer que $v'(x) = (u'(x) - Mu(x))e^{-Mx}$.

$\boxed{25}$ – En déduire que $v'(x) \leq e^{-Mx}$ puis que $u(x) \leq \frac{1}{M}(e^{M(x-a)} - 1)$.

$\boxed{26}$ – Quel résultat obtient-on si $x \leq a$? En déduire le lemme précédent.

On admet le résultat suivant (qui se démontre classiquement par une étude de fonction) :

$$\forall t \in [-1,1], \quad e^{|t|} - 1 \leq 2|t|.$$

$\boxed{27}$ – En déduire que si $|x-\alpha| \leq \min(r, \frac{1}{M})$, alors $|u(x)| \leq 2|x-\alpha|$.

$\boxed{28}$ – Montrer qu'alors $|\Phi'(x)| \leq 2M|x-\alpha|$, puis que $|\Phi(x)-\alpha| \leq M|x-\alpha|^2$ et donc $M|\Phi(x)-\alpha| \leq (M(x-\alpha))^2$.

$\boxed{29}$ – En déduire alors l'estimation $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{M}\left(M(x_0-\alpha)\right)^2$ lorsque $x_0 \in]\alpha - h, \alpha + h[$.

Ainsi, comme dans le paragraphe précédent, on retrouve une convergence quadratique de l'erreur, avec des contraintes moins fortes sur f. Une convergence quadratique est bien sûr meilleure que la convergence quasi-linéaire observée sur la méthode de dichotomie. Surtout, ici, l'erreur est strictement décroissante, et la vitesse de convergence dépend de la constante M qui elle même dépend des propriétés de la fonction f. Elle dépend aussi du choix de x_0 : plus on est prêt de α au premier coup, plus la convergence est rapide. La figure 3 montre les vitesses de convergence pour les deux méthodes de dichotomie et de Newton sur l'exemple cité précédemment, avec $x_0 = 1$. Pour une même condition d'arrêt, la convergence de la méthode de Newton est obtenue après 5 itérations, contre 32 pour la méthode de dichotomie.

Cependant la méthode de Newton demande d'avoir des fonctions dérivables et de pouvoir passer en argument la dérivée de la fonction. Cet inconvénient est largement compensé par l'amélioration de convergence.