Problèmes dynamiques à une dimension

Nous allons étudier ici principalement la méthode d'Euler dite explicite. Le problème numérique est simple : on cherche à résoudre un problème de Cauchy du type :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On possède donc une équation différentielle et une condition initiale. Le théorème de Cauchy Lipschitz assure l'existence et l'unicité, sous certaines hypothèses sur f, d'une solution à ce problème. Cependant, un tel problème ne possède pas toujours de solution formelle, c'est à dire qu'on ne connaît pas toujours une solution exacte. Comment faire alors ?

I Rappels sur la méthode d'Euler

On cherche à résoudre le problème de Cauchy sur un intervalle $[a, b]$. On suppose que $t_0 = a$ pour faciliter les explications. On découpe l'intervalle en n intervalles de même longueur : $t_0 = a$ et $t_i = a + \frac{i}{n}(b-a)$ pour $0 \leq i \leq n$. On a donc par conséquent $t_n = b$. Supposons que la fonction u est la solution du problème de Cauchy : u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et on peut écrire le développement limité à l'ordre 1 de u entre les points t_i et t_{i+1} : $u(t_{i+1}) = u(t_i) + (t_{i+1} - t_i)u'(t_i) + o(t_{i+1} - t_i)$. Or $u'(t_i) = f(t_i, u(t_i))$ et $t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$: $u(t_{i+1}) = u(t_i) + \frac{b-a}{n} f(t_i, u(t_i)) + o(\frac{1}{n})$. On pose donc le schéma d'Euler suivant :

$$\begin{cases} y_0 \\ y_{i+1} = y_i + \frac{b-a}{n} f(t_i, y_i) \end{cases}$$

On construit ainsi une suite de valeurs (y_i) dont on espère pouvoir montrer qu'elle est telle que les points (t_i, y_i) et $(t_i, u(t_i))$ sont raisonnablement proches. La valeur $\frac{b-a}{n}$ est appelée le *pas* de la méthode. On peut le remplacer par une valeur h quelconque.

II Deux exemples simples

II.1 Tracé de l'exponentielle

Dans cette partie, on considère l'équation différentielle suivante définie sur un intervalle $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = y(t) \end{cases}$$

$\boxed{1}$ – Rappeler la solution de ce problème de Cauchy.

$\boxed{2}$ – Construire en suivant le schéma d'Euler la suite (y_i) pour un pas de longueur $\frac{1}{n}$. Quelle est la forme générale de y_n ?

▷
On a $f(t, y) = y$ et donc $y_i = y_{i-1} \frac{1}{n} y_{i-1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) y_{i-1} = \cdots = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^i y_0 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^i$.

◁

$\boxed{3}$ – Quelle est la limite de y_n lorsque n tend vers $+\infty$? Donner un équivalent de $y_n - e$. Quel type de convergence a-t'on ?

On voit donc que sur un exemple simple, la méthode d'Euler semble marcher : l'approximation est bonne en y_n. Vous pouvez essayer de montrer que l'approximation est en fait bonne en tout point de l'intervalle $[0, 1]$.

II.2 Approximation d'une intégrale

On considère ici une fonction g définie sur l'intervalle $[0,1]$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(t) = g(t) \end{cases}$$

$\boxed{4}$ – Rappeler la solution de ce problème de Cauchy.

$\boxed{5}$ – Construire en suivant le schéma d'Euler la relation reliant y_i et y_{i-1} pour un pas de taille $\frac{1}{n}$. Montrer que l'on a l'égalité suivante :

$$y_i = \sum_{k=0}^{i-1} \left(\frac{1}{n} \times g\left(\frac{k}{n}\right) \right).$$

$\boxed{6}$ – Dessiner sur un graphe une fonction g quelconque vérifiant $g(0) = 1$. Subdiviser l'axe des abscisses en intervalles de longueur $\frac{1}{n}$. Placer sur le graphe un rectangle d'aire $\frac{1}{n} \times g(0)$, puis les rectangles d'aire $\frac{1}{n} \times g\left(\frac{k}{n}\right)$.

$\boxed{7}$ – D'après ce dessin, quelle est le limite de y_n lorsque n tend vers $+\infty$? La solution obtenue par la méthode d'Euler est-elle satisfaisante ?

Nous verrons en cours de mathématiques que cette méthode est en fait dans ce cas équivalente à l'approximation d'une intégrale par la méthode dite de Riemann. La convergence est alors linéaire.

III Étude de la convergence de la méthode dans le cas général.

Pour étudier le cas général, on pose certaines restrictions. On considère donc le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(t) = f(t, y(t)) \end{cases}$$

avec f une fonction définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ L-lipschitzienne par rapport à la seconde variable c'est à dire que pour tous y, z, t dans $\mathbb{R}$, on a : $|f(t,y) - f(t,z)| \leq L\,|y - z|$.

On construit la suite (y_i) par le schéma d'Euler avec pas de $\frac{1}{n}$ et on considère u la solution du problème de Cauchy, qu'on suppose $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$. On pose par ailleurs $t_i = \frac{i}{n}$. On admet la propriété suivante, qui n'est qu'une généralisation de l'égalité des accroissements finis :

Propriété 1

Soit u de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, soient a et b dans $[0,1]$, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$u(b) = u(a) + (b-a)u'(a) + (b-a)^2 u''(c).$$

$\boxed{8}$ – Montrer que u'' est bornée sur $[0,1]$. On appelle M un majorant de $|u''|$ sur $[0,1]$.

On veut montrer que sous ces hypothèses la quantité $|y_i - u(t_i)|$ est majorée par une quantité contrôlée par $\frac{1}{n}$. On rappelle que l'on a en particulier $y_0 = u(t_0)$.

$\boxed{9}$ – Montrer que $|y_i - u(t_i)| \leq |y_{i-1} - u(t_{i-1})| + \frac{1}{n}\,|f(t_{i-1}, y_{i-1}) - f(t_{i-1}, u(t_{i-1})| + \frac{1}{n^2}M$.

$\boxed{10}$ – En déduire que $|y_i - u(t_i)| \leq \left(1 + \frac{L}{n}\right)|y_{i-1} - u(t_{i-1})| + \frac{1}{n^2}M$. On pose alors $\delta_i = \dfrac{|y_i - u(t_i)|}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^i}$.

$\boxed{11}$ – Montrer que $\delta_i \leq \delta_{i-1} + \frac{1}{n^2}\frac{M}{\left(1+\frac{L}{n}\right)^i}$. En déduire que $\delta_i \leq \delta_0 + \frac{M}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{i} \left(1 + \frac{L}{n}\right)^{-k}$, puis que $\delta_i \leq \delta_0 + \frac{M}{Ln}$.

$\boxed{12}$ – Quelle est la valeur de δ_0 ?

$\boxed{13}$ – La méthode d'Euler est-elle une bonne méthode dans ces conditions ?

On dira que la méthode d'Euler est *convergente*. L'inégalité $\delta_i \leq \delta_0 + \frac{M}{Ln}$ dans le cas où $y(0) \neq u(t_0)$ (on fait une petite erreur d'approximation au démarrage) permet de dire que la méthode est *stable* : une petite perturbation n'influence pas la convergence. Enfin si on pose $e_i = |u(t_i) - \tilde{y}_i|$ où $\tilde{y}_i$ est la valeur y_i calculée en supposant $y_{i-1} = u(t_{i-1})$ et si $\sum_{i=0}^{n} e_n$ est convergente pour $n \to +\infty$, alors on dira que la méthode est *consistante*.