Algorithme du Pivot de Gauss

Le but de ce cours est l'étude de la résolution de systèmes linéaires. Nous nous intéresserons tout particulièrement à la méthode du pivot de Gauss déjà abordée lors du cours de mathématiques. Nous nous intéressons donc aux équations du type :

$$AX = B$$

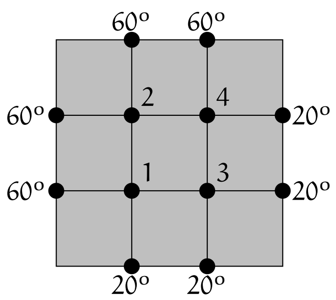
avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

La plupart des exemples de ce cours sont issus du livre « *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation* » de Philippe G. Ciarlet.

I Exemple d'application

On considère la grille de la figure ci-dessous composée de tiges métalliques [1]. Soit $T_1 \dots T_4$ les températures aux quatres nœuds intérieurs du quadrillage de la figure. La température en un nœud est à peu près égale à la moyenne des températures aux quatre nœuds voisins (au-dessus,à gauche à droite et en dessous). La température aux extrémités est fixée telle qu'indiquée sur la figure.

$\boxed{1}$ – Écrire un système d'équations dont la solution donne une estimations des températures $T_1, \dots, T_4$.



II Stabilité de la résolution de systèmes

Une première question est la résistance des solution à une petite perturbation : que se passe-t-il si les coefficients de la matrice changent, que se passe-t-il si le vecteur cible B est un peu modifié ? Pour répondre à cette question, on s'appuie sur un exemple. Á l'aide de la calculatrice résoudre les trois systèmes suivants :

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1+\delta u_1 \\ u_2+\delta u_2 \\ u_3+\delta u_3 \\ u_4+\delta u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32.1 \\ 22.9 \\ 33.1 \\ 30.9 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8.1 & 7.2 \\ 7.08 & 5.04 & 6 & 5 \\ 8 & 5.98 & 9.89 & 9 \\ 6.99 & 4.99 & 9 & 9.98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1+\Delta u_1 \\ u_2+\Delta u_2 \\ u_3+\Delta u_3 \\ u_4+\Delta u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{pmatrix}$$

On remarque donc qu'une modification de l'ordre de 10^{-1} des coefficients de B entraîne une multiplication de certaines valeur de la solution par 10, et une modification de l'ordre de 10^{-2} des coefficients de A entraîne une multiplication de certaines valeurs de la solution par plus de 100 ! Problème : ces ordres de grandeur sont parfois acceptés comme marge d'erreur en sciences expérimentales !

1. d'après « *Algèbre linéaire et applications* » de David Lay (éd. Pearson)

III Rappels sur le pivot de Gauss

L'algorithme du pivot de Gauss se déroule de la façon suivante :
- on choisit un *pivot* non nul dans la première colonne, disons sur la ligne i ;
- on échange la première et la i-ème ligne ;
- on effectue les opérations suivantes sur les lignes $2 \leq k \leq n$: $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{k1}}{a_{11}} L_1$;
- on passe à la colonne suivante ;

À la colonne j, on effectue les opérations suivantes :
- on choisit un pivot non nul dans la colonne j dans une ligne d'indice supérieur ($\geq$) à j ;
- on ramène le pivot sur la ligne j en effectuant éventuellement un échange de lignes ;
- on effectue les opérations suivantes sur les lignes $j < k \leq n$: $L_k \leftarrow L_k - \frac{a_{kj}}{a_{jj}} L_j$.

Ces opérations ont pour effet de transformer le système en un système triangulaire. Une fois arrivé à un système triangulaire de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}^* u_1 + a_{12}^* u_2 + \cdots + a_{1n}^* u_n & = & b_1^* \\ a_{22}^* u_2 + \cdots + a_{2n}^* u_n & = & b_2^* \\ \ddots & & \\ a_{nn}^* u_n & = & b_n^* \end{array}\right.$$

il suffit d'effectuer les opérations suivantes :

$$u_n = \frac{b_n^*}{a_{nn}^*} \tag{1}$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{a_{n-1,n-1}^*}(b_{n-1}^* - a_{n-1,n}^* u_n) \tag{2}$$

$$\vdots \tag{3}$$

$$u_1 = \frac{1}{a_{11}^*}(b_1^* - a_{12}^* u_2 - \cdots - a_{1n}^* u_n) \tag{4}$$

$\boxed{2}$ – Exécuter l'algorithme du pivot de Gauss sur le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y - z & = & 4 \\ x - y + z & = & -1 \\ x - 2y - z & = & 0 \end{array}\right.$$

IV Implémentation

Pour implémenter cette méthode, il faut choisir une représention. On choisit de représenter le système $AX = B$ par la matrice $C = [AB]$ (matrice de taille $n \times (n+1)$ où A et B sont accolées). On rappelle qu'effectuer une opération sur les lignes revient à multiplier la matrice à gauche par une matrice de transvection ou de permutation (donc inversible). Une matrice est représentée par un tableau à deux dimensions (par exemple en Python : une liste de listes). On accèdera au coefficient (i, j) d'une matrice A par l'instruction `A[i][j]` (on suppose ici que les indices commencent à 1). On évaluera la complexité en termes de nombre d'additions, de multiplications et de divisions.

On peut par exemple écrire le pseudo code d'échange des lignes i et j :

Algorithme 1 : Échange de la ligne i et la ligne j dans C.

Entrées : C une matrice, i et j les indices des lignes à échanger
Sorties : La modification de C se fait en place, on ne renvoie rien
$n \leftarrow \mathrm{longueur}(C[1])$ `/* Renvoie la longueur d'une ligne */`
pour $k = 1$ *à* $n + 1$ **faire**
    $t \leftarrow C[i][k]$
    $C[i][k] \leftarrow C[j][k]$
    $C[j][k] \leftarrow t$
fin

$\boxed{3}$ – Justifier la terminaison et la correction de cette fonction. En donner la complexité.

$\boxed{4}$ – Écrire la fonction effectuant l'opération $L_j \leftarrow L_j + \lambda L_i$. Les entrées seront la matrice C, les indices i et j et le scalaire λ.

$\boxed{5}$ – Justifier sa terminaison et sa correction. En donner la complexité.

À partir de ces deux fonctions, on peut donc écrire l'algorithme du pivot de Gauss :

Algorithme 2 : Algorithme du pivot de Gauss

Entrées : Une matrice C carrée de taille $n \times (n+1)$
Sorties : La matrice C est transformée en place en une matrice de partie gauche triangulaire
$n \leftarrow \mathtt{longueur}(C)$`/* Renvoie le nombre de lignes de C */`
pour $i = 1$ *à* n **faire**
  $i_0 \leftarrow$Choisir un pivot non nul parmi $c_{ii}, c_{i+1,i}, \dots, c_{ni}$
  Échanger les lignes i et i_0 dans C
  pour $k = i+1$ *à* n **faire**
    Effectuer $L_k \leftarrow L_k - \frac{c_{ki}}{c_{ii}} L_i$
  fin
fin

$\boxed{6}$ – Justifier la terminaison et la correction de l'algorithme. Donner sa complexité.

$\boxed{7}$ – Écrire l'algorithme de remontée qui permet d'obtenir les solutions d'un système triangulaire.

$\boxed{8}$ – Au final, quelle est la complexité de l'algorithme complet du pivot de Gauss ?

$\boxed{9}$ – Évaluer le nombre d'opérations nécessaire à la résolution d'un système en utilisant la méthode de Cramer. Donner un ordre de grandeur des deux complexités pour $n = 10$. Laquelle vous semble la plus efficace ?

V Recherche d'un pivot

Dans l'algorithme précédent, il reste un point obscur : le choix du pivot. On sait que le pivot doit être non nul, mais en dehors de cette contrainte, y'a-t-il une stratégie pour le choisir ? Commençons par un exemple. D'un point de vue algébrique, il n'y a aucune différence. Par contre, d'un point de vue numérique avec les approximations, cela peut avoir une importance. Commençons par un exemple.

On note S le système exacte suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 10^{-4}u_1 + u_2 & = & 1 \\ u_1 + u_2 & = & 2 \end{array}\right.$$

$\boxed{10}$ – Résoudre exactement le système grâce à la méthode de Cramer.

$\boxed{11}$ – On considère que les calculs se font avec 3 chiffres significatifs. Résoudre le système S en choisissant a_{11} comme pivot.

$\boxed{12}$ – Toujours avec la même précision de calcul, résoudre le système S en choisissant comme premier pivot le coefficient a_{21}.

$\boxed{13}$ – Que remarquez vous comme différences ? Que proposez-vous comme technique de choix du pivot ?

Les méthode de choix du pivot connues sont les suivantes :

- **Méthode du pivot partiel :** On choisit sur la colonne le pivot non nul de valeur absolue maximale
- **Méthode du pivot total :** On choisit le pivot de valeur absolue maximale parmi tous les coefficients de la matrice d'indices (k, l) avec $k \geq i$ et $l \geq i$.

La méthode du pivot total impose un travail sur les colonnes, c'est à dire un renommage des variables.

$\boxed{14}$ – Écrire l'algorithme de choix du pivot dans le cadre de la méthode du pivot partiel.

$\boxed{15}$ – Résoudre le système de l'exemple d'introduction.