DL 01

1 Mobile lié à deux ressorts

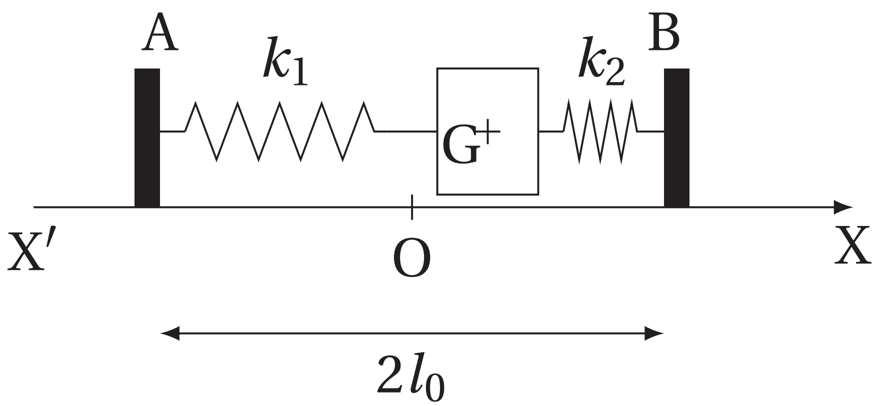

Figure 1: Mobile lié à deux ressorts

Un mobile cylindrique autoporteur de masse $m = 400$ g, est accroché à deux ressorts de raideurs respectives $k_1 = 15,0\ N.m^{-1}$ et $k_2 = 10,0\ N.m^{-1}$, de longueurs à vide identiques l_0, dont les extrémités A et B sont fixes et distantes de $2l_0$.
Un dispositif de guidage contraint son centre d'inertie G à ne se déplacer que selon un axe $X'X$ identique à l'axe des ressorts. On choisit sur cet axe une origine O correspondant à la position du point G à l'équilibre. Le mobile se déplace sur un coussin d'air qu'il forme en éjectant de l'air par un orifice situé sous sa base. On néglige les frottements et la masse des ressorts.

1. Donner sans calculs la position d'équilibre du mobile.

2. Exprimer soigneusement les forces $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$ qu'exercent les ressorts sur le mobile, en fonction de la position x de G, et en définissant un vecteur unitaire $\vec{u_x}$ dirigé vers la droite.

3. Déterminer l'équation différentielle du mouvement du mobile. En déduire la période des oscillations.

4. Déterminer l'expression de $x(t)$, sachant qu'à $t = 0$, le mobile est lâché sans vitesse initiale à la position $x_0 = +5,00$ cm. Donner la vitesse du mobile lorsqu'il passe à l'origine O.

2 Théorème de Shannon et Signal audio numérique

1. Soit un signal sinusoïdal de fréquence f, $s(t) = S_0 \cos(2\pi f t)$, échantillonné à la fréquence f_e : les échantillons sont donc toutes les valeurs $s(nT_e)$ où n est un entier relatif et T_e la période d'échantillonnage. Démontrer que les échantillons seraient les mêmes (au signe près) si la fréquence du signal était $-f$ ou $f + kf_e$ ou $-f + kf_e$ (k est un autre entier relatif). On peut donc dire que le signal échantillonné contient aussi ces fréquences.

2. On donne le spectre d'un signal analogique (Fig. 2). On échantillonne le signal avec une fréquence $f_e > 2f_{max}$. Tracer le spectre du signal échantillonné. Pourquoi vaut-il mieux échantillonner à une fréquence au moins égale à deux fois f_{max} (théorème de Shannon) ?

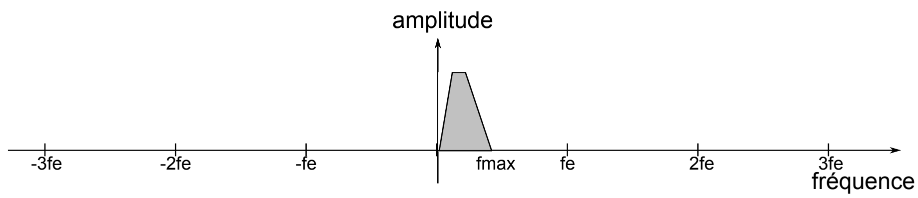

FIGURE 2 – Spectre et échantillonnage

3. Les CD audio contiennent le signal sous forme numérique, l'échantillonnage étant fait à 44.1 kHz et la quantification sur 16 bits. Déterminer la place prise en mémoire par un morceau d'une durée de 5 minutes, en Mégaoctets (1 octet = 8 bits).

4. On considère qu'un enregistrement audio doit reproduire fidèlement les sons de fréquences comprises entre 20.0 Hz et 20.0 kHz. Le signal analogique de départ contient des fréquences bien supérieures à 20.0 kHz, disons jusqu'à 30 kHz. Représenter qualitativement l'allure du spectre du signal échantillonné. Quelles sont les fréquences qui doivent être coupées avant la numérisation du signal ?

5. En fait il est impossible de couper complètement ces fréquences : pourquoi la qualité de l'enregistrement digital est-elle cependant acceptable ?

3 Télémètre à ultrasons

3.1 Principe du télémètre

Pour réaliser un télémètre, on place un émetteur et un récepteur à ultrasons côte à côte. Ce bloc est appelé le télémètre. À la distance D, on place un obstacle réfléchissant les ondes sonores, que nous appellerons la cible. Une onde sinusoïdale, de période T, est émise par l'émetteur du télémètre, elle se réfléchit sur la cible et est détectée par le récepteur du télémètre (Fig.3).

Sur l'écran d'un oscilloscope, on visualise simultanément deux signaux ; celui capté (par un dispositif non décrit) en sortie de l'émetteur et celui du récepteur.

1. On appelle temps de vol, noté t_v, la durée du trajet aller-retour de l'onde entre le télémètre et la cible. Exprimer t_v en fonction de la distance D séparant le télémètre de la cible et de la célérité c de l'onde.

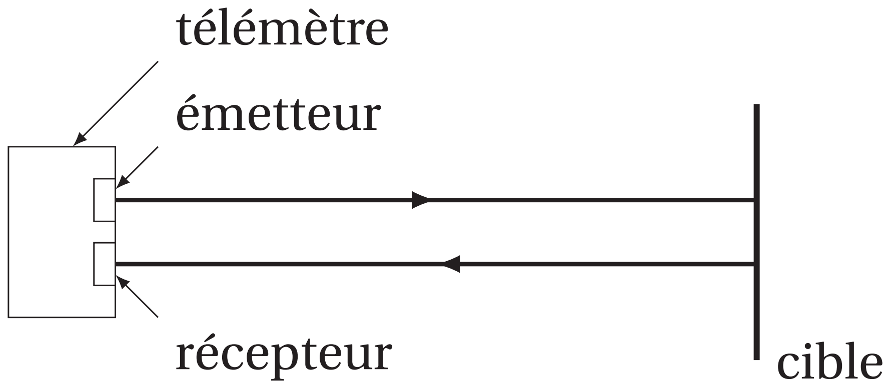

Figure 3: Principe du télémètre

2. Pour illustrer le principe de la mesure, on colle la cible au télémètre, puis on l'éloigne lentement, en comptant le nombre de coïncidences, c'est-à-dire le nombre de fois où les signaux sont en phase. Pour simplifier, on suppose que lorsque $D = 0$, les signaux sont en phase. On se place dans le cas où l'on a compté exactement un nombre n de coïncidences. Exprimer D en fonction de n et de la longueur d'onde λ des ondes ultrasonores.

3. Lors du recul de la cible, 50 coïncidences ont été comptées, puis on a continué à éloigner la cible afin d'observer les signaux suivants sur l'écran de l'oscilloscope (Fig. 4). Dans les conditions de l'expérience, la longueur d'onde des ondes sonores valait $8,5$ mm. En exploitant les données de l'enregistrement, calculer la distance séparant le télémètre de la cible.

4. L'incertitude-type sur la valeur de λ a été estimée par l'expérimentateur à $u(\lambda) = 0,2$ mm. On suppose que les incertitudes sur les autres paramètres sont négligeables. En déduire l'incertitude sur la mesure de D avec un niveau de confiance de 95%.

5. Quelle est alors l'incertitude relative sur la mesure de D ?

6. Pourquoi les deux signaux de la figure 4 sont-ils si différents ? Identifier quel est, selon toute vraisemblance, le signal capté en sortie de l'émetteur et celui reçu par le récepteur.

7. Le comptage des coïncidences a été réalisé en plaçant l'oscilloscope en mode XY. Dans le cas des signaux de la figure 4, représenter la figure que l'on obtiendrait en se plaçant dans ce mode.

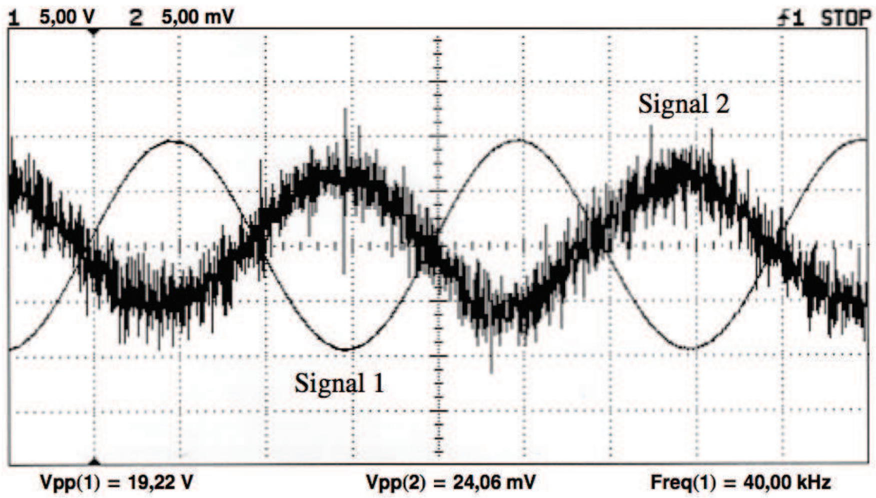

Figure 4: Signaux visualisés sur l'oscilloscope

3.2 Intensité du signal reçu

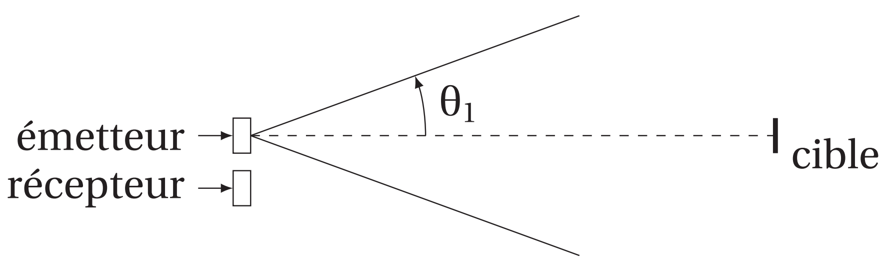

Figure 5: Angle de diffraction

On s'intéresse dans cette partie à la puissance acoustique effectivement reçue par le récepteur après réflexion des ultrasons sur une cible située à la distance $D = 4,0$ m. L'émetteur à ultrasons est constitué d'un cristal piézoélectrique contenu dans un boîtier muni d'une ouverture circulaire de diamètre $d = 5,0$ cm. On rappelle que le premier minimum d'intensité lors de la diffraction d'une onde de longueur d'onde λ par une ouverture circulaire de diamètre d se produit pour un angle d'émission θ_1 tel que $\sin\theta_1 = 1,22\dfrac{\lambda}{d}$ (Fig.5). Pour simplifier les calculs, on suppose que la cible et le récepteur sont également des objets circulaires de diamètre d. On pourra utiliser à bon escient les relations suivantes pour les petits angles : $\sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha$, où α doit être exprimé en radians.

1. Donner la valeur numérique de θ_1. On considère dans la suite que la puissance P_e émise par l'émetteur est émise de manière uniforme dans un cône de demi-angle au sommet θ_1 tel qu'il est représenté sur le schéma ci-dessus.

2. En remarquant que la distance D entre l'émetteur et la cible est très grande devant d, donner l'expression du rayon R du faisceau de diffraction à la distance D en fonction de θ_1 et D. Faire l'application numérique.

3. Déduire de la question précédente l'expression de la puissance P_c qui est effectivement reçue par la cible en fonction de P_e, θ_1, d et D, puis en fonction de P_e, d, D et λ. La cible se comporte elle-même comme un objet diffractant circulaire qui réémet l'onde ultrasonore en la diffractant.

4. Déterminer l'expression de la puissance P_r qui est effectivement reçue par le récepteur en fonction de P_e, d, D et λ.

5. Donner la valeur numérique de P_r/P_e. Commenter.

4 Anharmonicité des cordes de piano

Pour une corde de piano réelle, la déformation élastique de la corde fait que la relation entre ω et k n'est plus linéaire : on n'a plus $\omega = ck$. Pour une corde de masse linéique μ soumise à une tension T, cette relation, appelée relation de dispersion s'écrit :

$$\omega^2 = \frac{T}{\mu}k^2(1+\alpha k^2)$$

, avec α un coefficient lié à l'élasticité de la corde.

1. Quelle est l'unité de α ? Donner une condition sur α pour retrouver une relation linéaire entre ω et k. Quelle est dans cette limite la célérité c_0 des ondes sur la corde de piano ?

2. À partir des conditions aux limites, donner l'expression des longueurs d'onde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des différents modes propres en fonction de la longueur L de la corde.

3. Donner l'expression des fréquences $f_1, f_2, \ldots, f_n$ correspondantes en fonction de c_0, α, L et n. Comparer ces fréquences aux fréquences des modes propres d'une corde idéale ($\alpha = 0$) qu'on pourra noter f_{0n}.

4. On donne $\alpha = 2,0.10^{-4}$ S.I. et on considère une corde de longueur $L = 1,6$ m. À partir de quelle valeur de mode propre n la fréquence réelle f_n est-elle décalée de plus d'un demi-ton par rapport à la fréquence de la corde idéale f_{0n} ? (On rappelle qu'un demi-ton correspond à un rapport de fréquence de $2^{1/12}$.)

5. Quel est l'intérêt d'un piano à queue par rapport à un piano droit ?

5 Modulation d'amplitude

L'objet de cet exercice est la transmission de signaux radiophoniques à travers l'atmosphère.

5.1 Nécessité de moduler le signal

Rappeler le domaine de fréquences des ondes sonores audibles, ainsi que la célérité des ondes radio dans l'atmosphère. Sachant que l'on doit émettre avec une antenne dont la taille est de une demi-longueur d'onde, expliquer pourquoi il n'est pas possible de transmettre un signal radio d'aussi basse fréquence.

L'idée est donc de transmettre une onde de fréquence beaucoup plus grande (onde porteuse), mais dont l'amplitude ou la fréquence est modulée par le signal à transmettre (transmission AM ou FM). A la réception, il faudra démoduler le signal afin de récupérer le signal à transmettre.

5.2 Modulation d'amplitude

Un signal modulé en amplitude est de la forme $s(t) = S_0 (1 + m \cos(2\pi f t)) \cos(2\pi f_p t)$ où $f$est la fréquence du signal à transmettre, et f_p la fréquence de la porteuse, avec $f_p \gg f$. Le paramètre m est appelé “taux de modulation”.

1. Soit $E(t) = S_0 (1 + m \cos(2\pi f t))$. Montrer que $m = \frac{E_{max} - E_{min}}{E_{max} + E_{min}}$. Donner l'allure des variations de s(t) dans les cas $m = 0,8$ et $m = 1,2$ (surmodulation).

2. Donner l'allure du spectre du signal modulé. On rappelle que $cos(p)cos(q) = \frac{1}{2}(cos(p+q) + cos(p-q))$

3. Le signal à transmettre a en fait un spectre dont les fréquences sont comprises entre f_{min} et f_{max} , dont l'allure est donnée Fig.6. Représenter l'allure du spectre du signal modulé. Expliquer pourquoi les stations radio ne peuvent pas avoir des fréquences de porteuse trop proches les unes des autres.

Figure 6: Spectre du signal à transmettre

6 Arc-en-ciel

On a représenté Fig. 7 le trajet suivi par un rayon lumineux dans une goutte d'eau. On appelle "déviation" l'angle D. La déviation dépend uniquement de l'angle d'incidence i et de l'indice n de l'eau. On raisonnera avec des angles non orientés (positifs).

1. Démontrer que $D = 4r - 2i$.Comme r dépend de i, on peut expliciter cette formule en écrivant: $D(i) = 4r(i) - 2i$

2. On cherche l'angle i pour lequel la déviation est maximale. En dérivant l'équation précédente par rapport à i, démontrer que dans ce cas $\dfrac{dr}{di} = \dfrac{1}{2}$.

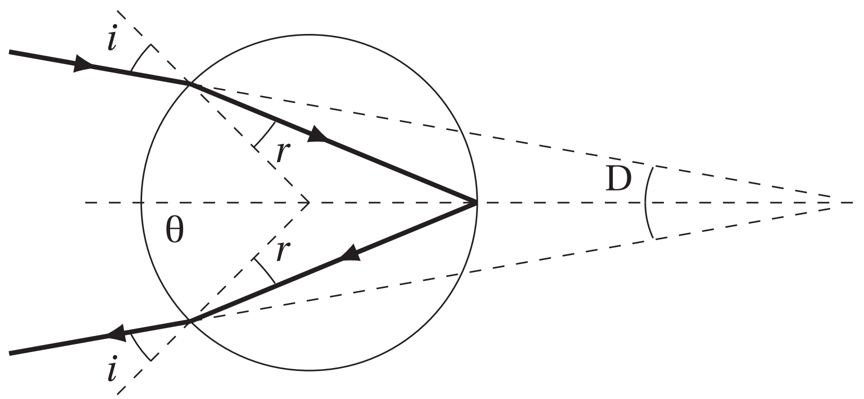

Figure 7: Réfraction et réflexion dans une goutte d'eau

3. La loi de Descartes s'écrit $\sin(i) = n \sin(r(i))$ car r dépend de i. En dérivant cette équation par rapport à i, et en utilisant la loi de Descartes, démontrer que l'incidence i_m pour laquelle la déviation est extrêmale est donnée par
$$\sin(i_m) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$
On note D_m cette déviation et l'on admettra que cet extrêmum est en fait un maximum.

4. Calculer i_m et D_m pour $n = 1,33$.

5. Expliquer pourquoi les gouttes d'eau qui paraissent brillantes sont celles qui sont vues sous un angle D_m par rapport à la lumière incidente. Faire un schéma indiquant la direction du soleil, l'horizon et l'angle sous lequel un observateur verra un arc-en-ciel.Pourquoi ne peut-on pas voir d'arc-en-ciel si le soleil est trop haut dans le ciel ?

6. En fait, la valeur $n = 1,33$ correspond à l'indice de réfraction pour de la lumière rouge. Pour la lumière violette, l'indice de réfraction vaut environ $1,34$. Calculer D_m pour la lumière violette et en déduire laquelle de ces deux couleurs est à l'intérieur de l'arc.